ANNÉE 1982

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR

DEUXIÈME ÉPREUVE A OPTION

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES M

(Durée : 4 h 00 - coefficient : 10)

---==oOOo==---

Cette épreuve est réservée aux candidats ayant composé en mathématiques M - P lors de la première épreuve à option. Son choix implique impérativement une option analogue lors des épreuves orales.

---==oOOo==---

La composition comprend un premier problème d'analyse, un deuxième problème d'algèbre, indépendants.

PROBLEME I

f est une fonction réelle, définie sur l'ensemble des réels

$$\mathbb{R} \xrightarrow[f]{} \mathbb{R}$$

Pour tout réel λ, on associe à f la fonction F_λ définie par :

$$\mathbb{R} \xrightarrow[F_\lambda]{} \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto F_\lambda(x) = f(x) + f(x + \lambda)$$

I) Montrer que sur un même repère orthonormé les 2 courbes représentatives de $y = F_\lambda(x)$ et $y = F_{-\lambda}(x)$ se déduisent l'une de l'autre par une transformation simple.

II) Si f est paire ou impaire, montrer que la courbe représentative de $y = F_\lambda(x)$ en repère orthonormé admet, soit un axe, soit un centre de symétrie.

III) On suppose maintenant pour f la seule hypothèse : f est majorée.

A tout réel λ, on fait correspondre le réel $M(\lambda)$ borne supérieure de la fonction F_λ sur $\mathbb{R}$. On définit donc la fonction M :

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & M(\lambda) \end{array}$$

$$M(\lambda) = \sup_{(x \in \mathbb{R})} \left[F_\lambda(x) \right]$$

La fonction M a-t-elle une parité ?

IV) Si la fonction f est de plus monotone, que peut-on dire de la fonction M ?

V) Expliciter la fonction M dans les 2 cas suivants :

a) f définie par $f(x) = \sin x$

b) f définie par $f(x) = -\operatorname{ch} x$

VI) On suppose maintenant

$$\begin{cases} \text{f majorée sur } \mathbb{R} \\ \text{f dérivable sur } \mathbb{R}, \text{ et f' majorée et minorée.} \end{cases}$$

Etablir :

a) Si $\lambda_o \in \mathbb{R}$ fixé

$\lambda \in \mathbb{R}$ variable

Φ définie par :

$$\Phi(\lambda) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x + \lambda) - f(x + \lambda_o) \right|$$

On a : $\Phi(\lambda) \longrightarrow 0$

b) φ et Ψ étant 2 fonctions majorées sur $\mathbb{R}$ établir :

$$\left| \sup_{(x \in \mathbb{R})} \varphi(x) - \sup_{(x \in \mathbb{R})} \Psi(x) \right| \leqslant \sup_{(x \in \mathbb{R})} \left| \varphi(x) - \Psi(x) \right|$$

(On pourra partir de : $\varphi(x) = \Psi(x) + \varphi(x) - \Psi(x)$

Des résultats a) et b) déduire que la fonction M est continue pour tout $\lambda_o \in \mathbb{R}$.

PROBLEME 2

On pourra admettre certains résultats [par exemple II) et III)] pour progresser, à condition de le signaler dans la copie.

Soit E l'ensemble $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure usuelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel ($\mathbb{R}$ étant le corps des réels).

f est la forme bilinéaire symétrique

$$E \times E \xrightarrow[f]{} \mathbb{R}$$

définie par :

si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ | $f(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$

q est la forme quadratique associée à f donc $q(\vec{x}) = f(\vec{x},\vec{x})$.
un vecteur $\vec{x}$ est dit f-positif ou f-négatif suivant que

$$q(\vec{x}) > 0 \quad \text{ou} \quad q(\vec{x}) < 0 \qquad \text{(inégalités strictes)}$$

Un vecteur $\vec{x}$ est dit f-unitaire si $q(\vec{x}) = \pm 1$

I) Soit $\vec{u} \in E$ tel que $q(\vec{u}) \neq 0$

Déterminer les vecteurs f-unitaires parallèles à $\vec{u}$.

II) Soit :

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

former $q(a_3 \vec{b} - b_3 \vec{a})$

En déduire l'implication : $f(\vec{a},\vec{b}) = 0$, $\vec{b}$ f-négatif, $\vec{a} \neq \vec{0}$ $\Longrightarrow$ $\vec{a}$ f-positif

III) Soit $\vec{u} \in E$, $q(\vec{u}) \neq 0$

Montrer que tout vecteur $\vec{x} \in E$ peut s'écrire de façon unique sous la forme : $\vec{x} = \lambda \vec{u} + \vec{x}'$ avec $f(\vec{u}, \vec{x}') = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

IV) Soit $\vec{u} \in E$, vecteur fixé, à ce vecteur $\vec{u}$ on associe la forme bilinéaire $F_{\vec{u}}$ définie par :

$$\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E \times E \quad F_{\vec{u}}(\vec{x},\vec{y}) = f(\vec{x},\vec{y}) + 2f(\vec{u},\vec{x}).\ f(\vec{u},\vec{y})$$

$Q_{\vec{u}}$ sera la forme quadratique associée à $F_{\vec{u}}$, $Q_{\vec{u}}(\vec{x}) = F_{\vec{u}}(\vec{x},\vec{x})$

Montrer que si $2q(\vec{u}) + 1 < 0$, la forme $F_{\vec{u}}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ (dans $Q_{\vec{u}}(\vec{x})$, on pourra utiliser pour $\vec{x}$ la décomposition précédente, et tenir compte de la question II)).

V) Soit $(\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3})$ une base de E, elle sera dite f-pseudo orthonormée si (ξ_1,ξ_2,ξ_3) et $(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$ étant les coordonnées de $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans cette base $\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E \times E$ on a : $f(\vec{x},\vec{y}) = \xi_1\zeta_1 + \xi_2\zeta_2 - \xi_3\zeta_3$

Quelles conditions nécessaires et suffisantes doivent vérifier $(\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3})$ par rapport aux formes f et q ?

VI) Soit $(\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3})$ une base f-pseudo orthonormée de E ; montrer que :

a) $F_{\vec{\varepsilon_3}}$ est un produit scalaire

b) Pour ce produit scalaire, $(\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3})$ est une base orthonormée.

VII) Réciproque :

Soit $\vec{\varepsilon}$ un vecteur de E, tel que $q(\vec{\varepsilon}) = -1$, $F_{\vec{\varepsilon}}$ est évidemment un produit scalaire.

Montrer qu'il existe une infinité de bases $(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3} = \vec{\varepsilon})$ orthonormées pour ce produit scalaire dont le troisième vecteur est $\vec{\varepsilon}$.

Montrer que pour la forme f, toutes ces bases sont f-pseudo orthonormées.

VIII) Corollaire :

Soit $\vec{a} \in E$ un vecteur f-négatif. Montrer qu'il existe une infinité de bases f-pseudo orthonormées dont le troisième vecteur est parallèle à $\vec{a}$.

IX) Soit φ un endomorphisme de E, A la matrice de φ dans une base f-pseudo orthonormée quelconque. Montrer que pour que φ conserve la forme f, c'est à dire : $\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E \times E$, on ait $f[\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})] = f(\vec{x},\vec{y})$,

il faut et il suffit que : ${}^tA\ U\ A = U$ $\qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

${}^tA$ transposée de A

[on pourra utiliser la forme matricielle de $f(\vec{x},\vec{y})$]

Montrer que les vecteurs colonnes de la matrice A constituent une base f-pseudo orthonormée.

X) Dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 sur $\mathbb{R}$ on considère le sous ensemble des matrices vérifiant la condition précédente.

Montrer que sur cet ensemble, la multiplication des matrices confère une structure de groupe.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail